転移点を持つ特異摂動問題のウェーブレット解析

橋　本　佳　明

§1．転移点を持つ特異摂動問題

特異摂動問題は微分方程式の最高階がパラメーターをふくみ、そのパラメーターが0に近づくときの解の挙動を調べる問題である。パラメーター $\epsilon\to 0$ のときの極限方程式は階数低下を引き起こすからもともとの摂動方程式につけた境界条件は極限方程式に対しては多すぎることになる。それ故に摂動方程式は境界条件を満たし、極限方程式は一般には境界条件を満たさないことになる。それ故に境界の近くでは解の挙動が著しく変わり、境界層が現れる。

特異摂動問題では低階の係数が零点を持つとき転移点問題という。転移点を持つ方程式は、例えば流体力学では2つの同軸の円筒に囲まれた粘性流体の運動について、2つの円筒が逆向きに回転しているとき転移点が生ずる。このとき円筒の境界では円筒と一緒に回転し内部では静止しているという状況は起こりうる。

§2．転移点問題の例

次の転移点を持つ特異摂動問題を考える：

$$(\mathrm{P})_{\pm}\qquad \begin{cases} \epsilon\dfrac{d^2x}{dt^2}\pm 2t\dfrac{dx}{dt}+\lambda x=0 & t\in(-1,\ 1) \\ x(-1)=\alpha,\ x(1)=\beta \end{cases}$$

極限方程式の解を X_0 と置く。このとき次のように場合分けされる：

I．内部境界層を持つ場合

$(\mathrm{P})_+$, $\lambda\neq 2m(m=0,1,2,\cdots)$ のとき、内部境界層が現れる。

$(\mathrm{P})_+$, $\lambda=2m(m=0,1,2,\cdots)$ のときは Ackerberg-O'Malley の共鳴が現れる。

II．内部境界層を持たない場合

$(\mathrm{P})_-$, $\lambda\neq 2m(m=0,1,2,\cdots)$ のとき境界に境界層が現れる。$(\mathrm{P})_-$, $\lambda=2m(m=0,1,2,\cdots)$ のときやはり Ackerberg-O'Malley の共鳴が現れる。

§3．数値解析の方法

ドーベシーズによるコンパクトサポートを持つウェーブレットの構成をする。それには次の3つの性質を持つ定数 $h_k(k=0,\cdots,2N-1)$, $gk(k=1-N,\cdots,N)$ 存在はリースの定理であり、それを数値解析で求める。

$$(3.1)\qquad \sum_{k=0}^{2N-1}h(k)h(k+2m)=\delta_{0m}$$

$$\text{for } m \text{ integer } 0\leq m\leq N-1$$

$$(3.2)\qquad \sum_{k=0}^{2N-1}h(k)=\sqrt{2}$$

$$(3.3)\qquad \sum g(k)k^m=0\quad 0\leq m\leq N-1$$

ここに $g(k)=(-1)^k h(-k+1)$ である。この $h(k)$, $g(k)$ の存在はリース（Riesz）の定理である。実際の数値解はニュートン法を用いて計算した。ウェーブレット解析には $N=25$ の値を用いた。この $h(k)$ に対して Fourier 多項式の無限積をつくりその逆 Fourier 変換から φ, ϕ をつくり、スケール変換と平行移動による関数族を作る。最初の微分方程式にテスト関数を書けた2次形式に直し、これらの φ から出来る関数族の一次結合から、ガレルキン法により係数を求め近似解を構成する。

§4．反　省

1．wavelet の scale 関数 $\varphi_{n,k}$ を決定する過程で平行移動の項のパラメーター k の自由度が残る。現在のところでは経験と感に基づいて行っている。

2．ここでは解の近似としては wavelet の scale 関数 $\phi_{n,k}$ のみを用いたが、本来の wavelet 近似としては wavelet 関数 ϕ を使う必要がある。

次の図は図1が差分法、図2がウェーブレットで描いた図である。

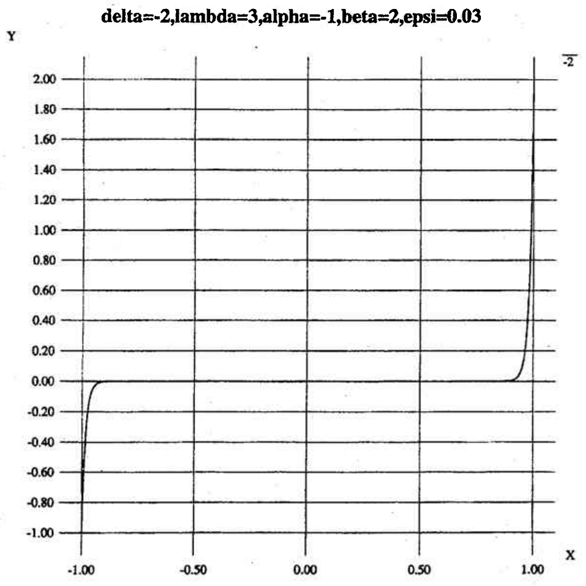

Figure 1

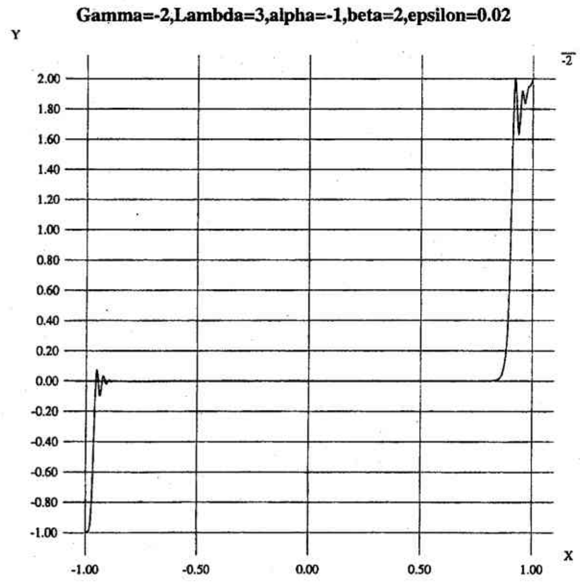

Figure 2